සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

№ 18575

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1989
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1989

(01) ශුද්ධ ගණිතය I
(01) Pure Mathematics I

විෂය අංකය		
01	S	I

පැය තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) U_r යනු
$$\frac{1}{2} + \frac{1.4}{2.5} + \frac{1.4.7}{2.5.8} + \frac{1.4.7.10}{2.5.8.11} + \ldots\ldots$$
ශ්‍රේණියෙහි r වෙනි පදය වේ.
U_r ඇසුරෙන් U_{r+1} ප්‍රකාශ කරන්න.
$f(r)$ යනු $f(r) - f(r-1) = U_r$ ද A හා B යනු නියතයන් ද වන $f(r) = (Ar + B)\, U_{r+1}$ වන අයුරින් වූ r හි ශ්‍රිතයකි.
A සහ B හි අගයන් සොයා ඒ නයින්
$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2}\left\{\frac{4.7.10\ldots\ldots(3n+1)}{2.5.8\ldots\ldots(3n-1)} - 1\right\}$$
බව පෙන්වන්න.

(ii) n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ යන්න 17 න් බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් සාධනය කරන්න.
ස්වායත්ත ක්‍රමයක් මගින් ද ප්‍රතිඵලය ගොඩනගන්න.

2. (i) ධන සංඛ්‍යා දෙකක සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය ඒවායේ ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යයට වඩා විශාල හෝ සමාන වන බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $n > r \geq 0$ නම්
$\frac{(n+1)}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$ බව සාධනය කරන්න.
ඕනෑම $n \geq 1$ නිඛිලයක් සඳහා
$(n+1)^n \geq 2^n\, n\,!$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $a,\ b,\ c$ නියත වන $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වන $\alpha,\ \beta$ ඇසුරෙන්
$acx^2 - b\,(c+a)\,x + (c+a)^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල ප්‍රකාශ කරන්න.

(iii) $\dfrac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ අසමානතාව සත්‍ය වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.

3. (i) $f(x) = 2x^4 + (3k-4)x^3 + (2k^2 - 5k - 5)x^2 + (2k^3 - 2k^2 - 3k - 6)x + 6$ හි $x^2 - k$ සාධකයක් වන පරිදි k හි අගයන් සොයන්න.
k හි එක් එක් අගයට අනුරූප $f(x)$ හි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2}\{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\}$ බව පෙන්වන්න.
$x = b + c - a,\ y = c + a - b,\ z = a + b - c,$ නම්
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4\,(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ බව අපෝහනය කරන්න.

4. ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම් n ධන නිඛිලයක් සඳහා

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \text{ සහ } z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$$ බව පෙන්වන්න.

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^8 \text{ සහ } \left(z - \frac{1}{z}\right)^8$$ හි ප්‍රසාරණයන් සැලකීමෙන්

(අ) $64(\cos^8\theta + \sin^8\theta) = \cos 8\theta + 28\cos 4\theta + 35,$

(ආ) $8(\cos^8\theta - \sin^8\theta) = \cos 6\theta + 7\cos 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

$\cos 6\theta = -7\cos 2\theta$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

5. P_0, P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් z_0, z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ.

$$\frac{P_0 P_2}{P_0 P_1} = \lambda > 0 \text{ නම් හා } \angle P_1 P_0 P_2 = \theta \text{ නම්}$$

$(z_2 - z_0)$ සහ $(z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍ය ලබා ගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිරූපණ ඉදිරිපත් කර $z_2 = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව අපෝහනය කරන්න ; මෙහි θ වාමාවර්ත අතට මැන ඇත.

A, B, C, D, E, F ශීර්ෂ වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද $ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක A සහ B ශීර්ෂ පිළිවෙලින් $2 + 2i$ සහ $3 + 3i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කරගනිමින් E සහ F ශීර්ෂ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

6. (i) රාක්කයක එකිනෙකින් වෙනස් පොත් 16 ක් තිබෙන අතර 3 ක් වීජගණිතය, 4 ක් කලනය, 3 ක් ජ්‍යාමිතිය සහ අනෙක්වා ත්‍රිකෝණමිතිය වේ. කොපමණ ආකාර වලින් පොත් පිළියෙල කර තැබිය හැකි ද? එක එකක් විෂයට අයත් පොත් එකට සිටින සේ තබන විට පිළියෙල කිරීම සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(ii) $\left(5\sqrt{2} + 7\right)^{\frac{1}{3}} - \left(5\sqrt{2} - 7\right)^{\frac{1}{3}}$ යන්න 2 ට සමාන බව පෙන්වන්න.

7. ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

(අ) $x = \frac{1}{3}$ වන විට, $(\frac{1}{2} + x)^9$ හි x වල ආරෝහණ බල වලින් යුත් ප්‍රසාරණයේ වැඩිතම පදයෙහි අගය සොයන්න.

(ආ) $(1 + x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n$ නම් c_r/c_{r-1} හි අගය සොයා
$r(c_r + c_{r-1}) = (n + 1)c_{r-1}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්
$c_0 + 3c_1 + 5c_2 + \ldots\ldots + (2n + 1)c_n = 2^n(n+1)$
බව සාධනය කරන්න.

8. (i) $\dfrac{\sin x}{x}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමූලධර්ම වලින් සොයන්න.

(ii) පහත දැක්වෙන දෑය x විෂයයෙන් අවකලනය කර ඔබේ ප්‍රතිඵලය සරලම ආකාරයෙන් දෙන්න.

$$\cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{b\cos x + a}\right);$$ මෙහි a යහ b යනු නියත වේ.

(iii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර $x = \tan\theta$ වේ.

$\dfrac{dy}{d\theta}$ සහ $\dfrac{d^2y}{d\theta^2}$ ඇසුරෙන් $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

$$(1 + x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$ නම්

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$$ බව සාධනය කරන්න.

9. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින්

$$\int \sin(\log x)\, dx \text{ අගයන්න.}$$

r නියතයක් වන

$$I = \int x^r \sin(\log x)\, dx \quad \text{සහ} \quad J = \int x^r \cos(\log x)\, dx$$

නම්

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right) I - \frac{r}{2} J = \frac{x^{r+1}}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} + \text{නියතයක්}$$

බව සාධනය කරන්න.

$x^{r+1} \sin(\log x)$ අවකලනය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් I සහ J අතර තවත් සම්බන්ධයක් ලබාගෙන

$$I = \frac{x^{r+1}}{r^2 + 2r + 2}\{(r+1)\sin(\log x) - \cos(\log x)\} + \text{නියතයක්}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින් a සහ b නියත වන $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ අගයන්න.

10. (i) $\int_a^b f(x)\, dx$ නිශ්චිත අනුකලය නිමානය කිරීම සඳහා සිම්සන් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

පහත වගුව උපයෝගී කරගනිමින් සිම්සන් නීතිය මගින් $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x}\, dx$ අනුකලය අගයන්න.

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$\sqrt{x}$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

(ii) $f(x) = \log(1 + x + x^2)$ නම්

$(1 + x + x^2) f'(x) = 1 + 2x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $n = 2, 3, 4, 5$ සඳහා $x = 0$ දී $f(x)$ හි n වෙනි ව්‍යුත්පන්නයෙහි අගය වන $f^{(n)}(0)$ සොයන්න.

x^5 පදය දක්වා $f(x)$ හි මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබාගන්න.

11. $x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta$

$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

පරාමිතික සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය අනුරේඛණය කරන්න.

ඉහත සමීකරණ දෙකින් θ ඉවත් කර x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

මෙම සම්බන්ධය මගින් නිරූපණය කරන වක්‍රය පරාමිතික සමීකරණ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන වක්‍රයෙන් වෙනස් වන්නේ කෙසේ ද?

12. $x^2 = 4y$ සහ $x^2 = y^3$ වක්‍ර වල කටු සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.

ප්‍රථම චතුර්ථපාදය තුල මෙම වක්‍ර දෙක මගින් අන්තර්ගත කරනු ලබන S වර්ගඵලය සොයන්න.

S සෘජුකෝණ හතරකින් (අ) x - අක්ෂය (ආ) y - අක්ෂය වටා භ්‍රමණය කිරීමේදී ජනනය වන පරිමාව සොයන්න.